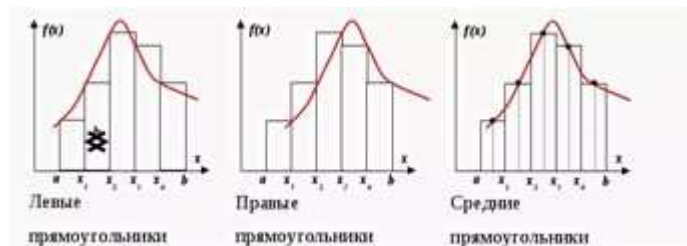


Численное интегрирование методом прямоугольников

Метод прямоугольников — это метод численного интегрирования функции одной переменной, который заключается в приближённом вычислении определённого интеграла путём замены площади под графиком функции суммой площадей прямоугольников.



Суть метода

Определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью x , прямыми $x = a$ и $x = b$. В методе прямоугольников эту площадь приближают суммой площадей прямоугольников, ширина которых определяется расстоянием между соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах.

Виды метода прямоугольников

1. Метод левых прямоугольников. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ высота прямоугольника выбирается равной значению функции в крайней левой точке отрезка ($y_i = f(x_i)$). Площадь такого прямоугольника равна $S_i = h \cdot y_i$, где h — шаг интегрирования. Интеграл приближённо находится с помощью суммы:

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} y_i.$$

2. Метод правых прямоугольников. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ высота прямоугольника равна значению функции в правой точке (y_{i+1}). Формула для приближённого вычисления интеграла отличается от метода левых прямоугольников только пределами суммирования.

3. Метод средних (центральных) прямоугольников. В качестве высоты прямоугольника выбирается значение функции в середине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. То есть $y_{i+1/2} = f((x_i + x_{i+1})/2)$. Площадь такого прямоугольника равна $S_i = h \cdot f(x_{i+1/2})$. Интеграл вычисляется по формуле:

$$I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2}).$$

Алгоритм применения

1. Разбить интервал интегрирования $[a, b]$ на n равных частей.
2. Определить шаг интегрирования $h = (b - a)/n$.
3. Для каждого отрезка вычислить площадь прямоугольника по соответствующей формуле (в зависимости от выбранного метода).
4. Сложить площади всех прямоугольников, чтобы получить приближённое значение интеграла.

Чем больше количество разбиений (n), тем выше точность результата.

Особенности

- Алгебраический порядок точности метода левых и правых прямоугольников равен 0. Для метода средних прямоугольников он равен 1.
- При увеличении числа разбиений точность вычислений возрастает.
- Погрешность метода зависит от длины отрезка интегрирования: чем больше длина отрезка, тем больше погрешность.

Метод прямоугольников — один из простейших методов численного интегрирования, который часто используется для приближённого вычисления определённых интегралов, когда аналитическое решение сложно найти.